

# The geometry of graphs: Anwendungen

Frank Fuhlbrück

[fuhlbrue@informatik.hu-berlin.de](mailto:fuhlbrue@informatik.hu-berlin.de)

basierend auf einem Artikel von Nathan Linial, Eran London und Yury Rabinovich (1995)

Vortragsausarbeitung im Rahmen des Seminars

## Aktuelle Themen der theoretischen Informatik (WS2009/10) <sup>1</sup>

Am Lehrstuhl *Logik in der Informatik* von Prof. Dr. Martin Grohe

In *The geometry of graphs and some of its algorithmic applications*[LLR95] untersuchen Nathan Linial, Eran London und Yury Rabinovich Einbettungen von Graphen (bzw. Metriken) in normierte Räume und zeigen den Nutzen dieser für eine Reihe von Problemen. Kord Eickmeyer und ich stellten wesentliche Punkte daraus im Seminar vor, wobei Kord Eickmeyer die Algorithmen zur Einbettung selbst und ich die Anwendungen erläuterte. Diese Ausarbeitung beschäftigt sich dementsprechend vorrangig mit den Anwendungen und geht von bereits eingebetteten Graphen bzw. endlichen Metriken aus.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung, Einbettungen</b>	<b>2</b>
1.1	Graphmetriken . . . . .	2
1.2	Einbettungen in normierte Räume . . . . .	2
1.3	Einbettungsalgorithmen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Mehrgüterflüsse</b>	<b>3</b>
2.1	Definitionen . . . . .	4
2.2	Max-Flow-Min-Cut-Gap . . . . .	5
2.3	Algorithmus . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Balancierte Separatoren</b>	<b>8</b>
3.1	Definition und Bedeutung . . . . .	8
3.2	Konstruktion des Separators . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Zerlegungen mit geringem Durchmesser</b>	<b>12</b>
4.1	Definition und Bedeutung . . . . .	12
4.2	Konstruktion . . . . .	13

# 1 Einleitung, Einbettungen

## 1.1 Graphmetriken

Im Folgenden werden zusammenhängende, ungerichtete Graphen  $G = (V, E)$  mit Kantengewicht  $w_G : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  betrachtet. Die dazugehörige Pseudometrik  $d_G$  ergibt sich aus den üblichen Distanzen

$$d_G(u, v) = \begin{cases} \min_{u,v\text{-Pfade } P} \sum_{e \in P} w(e) & u \neq v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Eigenschaften einer Pseudometrik sind erfüllt:

$$d_G(u, u) = 0 \quad (\text{A1})$$

$$d_G(u, v) = d_G(v, u) \quad (\text{A2})$$

$$d_G(u, w) \leq d_G(u, v) + d_G(v, w) \quad (\text{A3})$$

A1 wird durch die Definition erfüllt, A2 über die Symmetrie der Pfade und A3 über das Minimum. Die für eine Metrik weitere nötige Eigenschaft  $\forall u, v \in V : d_G(u, v) = 0 \Rightarrow u = v$  wird in den meisten folgenden Situationen nicht benötigt, ist aber bei einem ungewichteten Graphen auch gegeben.

Statt eines Graphen lässt sich auch direkt ein pseudometrischer Raum  $(V, d)$  betrachten.

## 1.2 Einbettungen in normierte Räume

Für den  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  und die Norm  $\|\cdot\|$  existiert die Metrik  $d$ :

$$d_{\|\cdot\|}(r, s) = \|r - s\|$$

Über eine Funktion  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  lässt sich ein Graph  $(V, E)$  bzw. eine Pseudometrik  $(V, d_G)$  in den  $\mathbb{R}^n$  mit Norm  $\|\cdot\|$  einbetten. Falls

$$d_G(v, u) = d_{\|\cdot\|}(\varphi(v), \varphi(u))$$

gilt, so ist  $\varphi$  eine *isometrische Einbettung*. Gilt dagegen nur

$$d_G(v, u) \geq d_{\|\cdot\|}(\varphi(v), \varphi(u)) \geq c^{-1} \cdot d_G(v, u),$$

so heißt  $\varphi$  *Einbettung mit Verzerrung  $c$* .

**Def.  $\dim_c, \overline{\dim}_c$ :** Für eine Pseudometrik  $X = (V, d_G)$  (eines Graphen  $G$ ) ist

$$\dim_c(G) = \dim_c(X) =$$

$$\min\{n \mid \exists \text{ Norm } \|\cdot\| \exists \text{ Einbettung } \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ von } d_G \text{ nach } d_{\|\cdot\|} \text{ mit Verzerrung } c\}$$

$$\overline{\dim}_c(G) = \overline{\dim}_c(X) =$$

$$\min\{n \mid \exists \text{ Einbettung } \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ von } d_G \text{ nach } d_{\|\cdot\|_\infty} \text{ mit Verzerrung } c\}$$

mit  $\|(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i$

In den kommenden Abschnitten wird vor allem  $l_p^n$ , d.h.  $\mathbb{R}^n$  mit der Norm

$$\|(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p}$$

Gegenstand sein. Weiterhin wird die Minkowski-Norm einer beliebigen Einheitskugel  $\mathbb{B}$  (konvexe, beschränkte, offene und punktsymmetrische Menge) im Abschnitt zu Separatoren eine Rolle spielen:

$$\|x\|_{\mathbb{B}} = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda^{-1}x \in \mathbb{B}\}$$

(Durch das Infimum wird auch dem Ursprung der Wert 0 zugeordnet.)

### 1.3 Einbettungsalgorithmen

In ihrem Abschnitt 3 beweisen [LLR95] folgende u.a. Ergebnisse für deterministische bzw. probabilistische Algorithmen:

1. (Korollar 3.4 Teil2)

Sei  $(V, d)$  ein endlicher pseudometrischer Raum und  $\{(s_i, t_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, k\}\} \in V \times V$  eine Menge von Punktpaaren.

Dann existiert ein deterministischer Polynomialzeitalgorithmus der eine Einbettung  $\varphi : V \rightarrow l_1^{\mathcal{O}(|V|^2)}$  mit den Eigenschaften

$$\forall u, v \in V : d(u, v) \geq \|\varphi(u) - \varphi(v)\|$$

und

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} : \|\varphi(s_i) - \varphi(t_i)\| \leq \Omega\left(\frac{1}{\log_2 k}\right) d(s_i, t_i)$$

berechnet.

2. (Theorem 3.2 Teil5)

Sei  $(V, d)$  ein endlicher pseudometrischer Raum und  $p \geq 2, p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Dann existiert ein probabilistischer Polynomialzeitalgorithmus der eine Einbettung in den  $l_p^{\mathcal{O}(\log^2 |V|)}$  mit Verzerrung  $\mathcal{O}(\log |V|)$  berechnet.

## 2 Mehrgüterflüsse

Netzwerke modellieren den Transport von Gütern (engl. *commodities*, z.B. Container, Wasser) mit Hilfe von (gerichteten) Graphen. Dabei werden einige Ecken als Quellen bzw. Senken ausgezeichnet (hier: je eine pro Gut), wobei die Güter von den jeweiligen Quellen zu den passenden Senken transportiert werden sollen. Allen Kanten wird eine Kapazität und allen Gütern eine Nachfrage zugeordnet. Nun gibt es zwei wesentliche Blickwinkel auf das Netzwerk:

**Flüsse** stellen die Nutzung/Auslastung der Kanten je Gut dar. Ein naheliegendes Ziel ist es diese so zu optimieren, dass die Nachfrage aller Güter weitestgehend erfüllt ist. Als Kriterium wird hier die minimale Erfüllung genutzt (siehe Definition, S.4)

**Schnitte** (modelliert als Eckenmengen) trennen Quellen und Senken im Netzwerk voneinander. Hier interessiert vor allem der Quotient aus Gesamtkapazität über den Schnitt und der Gesamtnachfrage der durch den Schnitt getrennten Quelle-Senke-Paare. Der Schnitt mit minimalem Quotient stellt den größten Engpass im Netzwerk dar.

Um einen minimalen Schnitt zu finden, nutzen [LLR95] die Einbettung einer endlichen Metrik, die sich entsprechend des dualisierten Flussproblems berechnen lässt.

Im Folgenden gebe ich einige Definitionen von Netzwerk, Schnitt usw., stelle die Konstruktion des Flussproblems und seiner Dualisierung analog zu [GVY93] dar und gehe schließlich auf den Algorithmus von [LLR95] ein, der die Einbettung der gewonnenen endlichen Metrik nutzt.

## 2.1 Definitionen

[LLR95] geben nur ungefähre Definitionen von Netzwerk usw. an, ich habe sie so gewählt, dass sie möglichst widerspruchsfrei zur Verwendung in [LLR95] und dem von ihnen zitierten Artikel [GVY93] passen.

**Def. Netzwerk:** Ein Mehrgüternetzwerk  $N$  ist ein Quadrupel  $N = (V, E, K, c)$  mit Knoten  $V$ , Kanten  $E \subseteq \binom{V}{2}$ , Gütern  $K \subseteq V \times V \times \mathbb{R}_0^+$  und der Kapazitätsfunktion  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Für ein Gut  $k$  seien Quelle  $s_k$ , Senke  $t_k$  und Nachfrage  $D_k$  definiert, sodass  $k = (s_k, t_k, D_k)$ .

**Def. Fluss:** Eine Funktion  $f : V \times V \times K \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Fluss im Netzwerk  $N$  falls gilt:

1. Kapazitätseinhaltung:

$$\forall \{u, v\} \in E : \sum_{k \in K} f(u, v, k) \leq c(\{u, v\}) \quad (\text{F1})$$

2. Eingang entspricht Ausgang (außer für Quellen und Senken)

$$\forall k \in K \forall u \in V \setminus \{s_k, t_k\} : \sum_{v \in V \setminus \{u\}} f(u, v, k) = \sum_{v \in V \setminus \{u\}} f(v, u, k) \quad (\text{F2})$$

3. Ausgang der Quelle entspricht Eingang der Senke:

$$\forall k \in K : \sum_{v \in V} f(s_k, v, k) = \sum_{v \in V} f(v, t_k, k) \quad (\text{F3})$$

4. Kein Fluss über Nichtkanten:

$$f(u, v, k) = 0, \text{ falls } \{u, v\} \notin E \quad (\text{F4})$$

**Def. Wert eines Flusses:** Der Wert eines Flusses (im Sinne des *maximum concurrent flow problem*) ist

$$\text{val}(f) = \min \left\{ \frac{1}{D_k} \sum_{v \in V} f(s_k, v, k) \mid k \in K \right\}$$

**Def. Schnitt, Kapazität, Nachfrage eines Schnitts:** Ein Schnitt im Netzwerk ist eine Menge  $S \subseteq V$ . Die Kapazität des Schnitts ist definiert als

$$\text{Cap}(S) = \sum_{\{s, v\} \in E: |\{s, v\} \cap S| = 1} c(\{s, v\}) \quad ,$$

die Nachfrage als

$$\text{Dem}(S) = \sum_{\substack{k \in K \text{ mit} \\ |\{s_k, t_k\} \cap S| = 1}} D_k \quad .$$

Der bereits erwähnte Quotient  $\text{Cap}(S)/\text{Dem}(S)$  entscheidet, ob ein Schnitt minimal ist: Ein minimaler Schnitt  $S$  eines Netzwerks erfüllt also

$$\frac{\text{Cap}(S)}{\text{Dem}(S)} = \min \left\{ \frac{\text{Cap}(S')}{\text{Dem}(S')} \mid S' \subseteq V \right\} \quad .$$

## 2.2 Max-Flow-Min-Cut-Gap

Für nur ein Gut gilt das bekannte Max-Flow-Min-Cut-Theorem: es existieren ein Fluss  $f$  und ein Schnitt  $S$  mit  $\text{val}(f) = \text{Cap}(S)/\text{Dem}(S)$ .

Allgemein gilt  $\text{val}(f) \leq \text{Cap}(S)/\text{Dem}(S)$  für jeden Fluss  $f$  und jeden Schnitt  $S$ . Bei mehr als einem Gut stellt sich die Frage, wie groß der Quotient aus größtem Fluss und kleinstem Schnitt ist (vor [LLR95] u.a. von [LR88] untersucht). Zur Bestimmung dieser Lücke (engl. *Max-Flow-Min-Cut-Gap*) nutzen [LLR95] eine Einbettung in  $l_1^{\mathcal{O}(|V^2|)}$ . Danach kann ein Schnitt gefunden werden, der nicht größer als  $\mathcal{O}(\log|K|)$  mal dem Wert des maximalen Flusses ist.

Eingebettet wird eine Pseudometrik, die sich als Lösung eines zum Flussproblem dualen linearen Programms ergibt. Diesen Weg betrachten wir im Folgenden detaillierter:

$$\begin{array}{c} \text{Kanten} \\ \vdots \\ \text{Güter} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \text{Pfade} \\ f \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & D_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & D_{k'} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & D_{k''} \end{pmatrix} \cdot x \leq \begin{pmatrix} c(e) \\ c(e') \\ c(e'') \\ c(e''') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

Abbildung 1: Das lineare Programm: beim Dualisieren ergeben die Pfadspalten, die nur bei den Kanten und Gütern Werte  $\neq 0$  enthalten und die Spalte der  $D_k$  die Bedingungen.

Wir betrachten also zunächst die Flussbedingungen als lineares Programm (siehe dazu auch Abb. 1). Allerdings formulieren wir die Bedingungen nicht für einzelne Kanten, sondern für ganze Pfade, genauer: für alle  $s_k$ - $t_k$ -Pfade für jedes Gut  $k$ . Diese Konstruktion entspricht [GVY93] und führt nach dem Dualisieren und Abschätzen auf die in [LLR95] gefundenen Werte.

Sei  $l_k$  die Anzahl der  $s_k$ - $t_k$ -Pfade und seien  $q_k^1, \dots, q_k^{l_k}$  die Pfade selbst. Für jede Kante  $e \in E$  gelte  $q_k^j(e) = 1$ , falls  $e$  auf  $q_k^j$  liegt,  $q_k^j(e) = 0$  sonst.  $f_k^j$  sei der Wert des Flusses über den Pfad

$q_k^j$ . Das lineare Programm ergibt sich als:

$$\begin{aligned} & \text{maximiere } f \\ & \sum_{k \in K, 1 \leq j \leq l_k} f_k^j q_k^j(e) \leq c(e) && \forall e \in E \\ - & \sum_{1 \leq j \leq l_k} f_k^j + f \cdot D_k \leq 0 && \forall k \in K \\ & -f_k^j \leq 0 && \forall k \in K, 1 \leq j \leq l_k \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung beschreibt wieder die Kapazität, nun muss aber über alle Pfade summiert werden, auf denen eine Kante liegt. Die zweite Ungleichung sichert, dass der Wert des Flusses genau das Minimum über die Quotienten ist (s. Definition S.4), allerdings entsprechend umgestellt.

Der Lösungsvektor hat dann die Gestalt  $x = (f_{k_1}^1, \dots, f_{k_{|K|}}^{l_{|K|}}, f)^T$ , zu maximieren ist  $(0, \dots, 0, 1)^T \cdot x$ . Sei  $\lambda$  der Wert einer optimalen Lösung (eine solche existiert analog zum einfachen Flussproblem). Dann ist  $\lambda$  auch Wert der optimalen Lösung des dualen Programms (zur Dualisierung siehe z.B. [Vaz01]).

Der Bedingungsvektor des originalen Programms und damit die Optimierungskoeffizienten des dualen Programms entsprechen den Kantenkapazitäten, sodass der Lösungsvektor des dualen Programms eine Kantengewichtung ist, wo die Koeffizienten nicht 0 sind. Setzen wir für Nichtkanten  $\{u, v\}$   $c_{u,v} = 0$  und sonst  $c_{u,v} = c(\{u, v\})$ , können wir die Kantengewichtung auch als Gewicht der Eckenpaare verstehen. Zu minimieren ist dann:

$$\sum_{u \neq v} d_{u,v} c_{u,v}$$

Aus der Spalte von  $f$  erhalten wir dual die Bedingung  $\sum_{k \in K} p_k D_k \geq 1$ . Für jeden Pfad  $q_k^j$  erhalten wir aus dessen Spalte die Bedingung

$$\sum_{\{u,v\} \in E} q_k^j(\{u, v\}) d_{u,v} - p_k \geq 0$$

Da dies für alle Pfade eines Guts gilt und man  $d$  als Kantengewicht (noch nicht Pseudometrik!) von  $(V, E)$  auffassen kann gilt für die Distanzen:

$$\text{dist}_d(s_k, t_k) \geq p_k$$

Setzen wir das in die erste Bedingung ein erhalten wir:

$$\sum_{k \in K} \text{dist}_d(s_k, t_k) D_k \geq 1 \quad (*)$$

Da Kanten ungerichtet sind (für A2), stets zwei Knoten enthalten ( $d_{u,u} = 0$  ist möglich, da  $c_{u,u} = 0$ ) und wir minimieren (d.h. gilt Dreiecksungleichung A3:  $d_{u,v} \leq d_{u,w} + d_{w,v}$  nicht, wird  $d_{u,v}$  durch geeignetes Setzen geringer), genügt es ab hier Pseudometriken  $d$  auf  $V$  zu betrachten.

Durch Dreiecksungleichung gilt dann auch

$$\sum_{k \in K} d_{s_k, t_k} D_k = \sum_{k \in K} \text{dist}_d(s_k, t_k) D_k$$

(fehlte die Kante  $\{s_k, t_k\}$  im Netzwerk, so kann man sie mit Kapazität 0 hinzufügen, ohne  $\lambda$  zu verändern).

Offensichtlich erfüllt eines der minimalen  $d$  die Bedingung (\*) mit Gleichheit (da die  $p_k$  formal ebenfalls Teil des Lösungsvektors sind, sind sie geeignet wählbar), damit kann die Gleichheit im endgültigen duale lineare Programm gefordert werden:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & \sum_{u \neq v} d_{u,v} c_{u,v} \\ & \sum_{k \in K} d_{s_k, t_k} D_k = 1 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für die optimale Lösung  $\lambda$ :

$$\lambda = \min_{\text{Pseudometriken } d} \frac{\sum_{u \neq v} d_{u,v} c_{u,v}}{\sum_{k \in K} d_{s_k, t_k} D_k}$$

## 2.3 Algorithmus

**Satz:** In deterministischer Polynomialzeit lässt sich ein Schnitt finden, dessen Quotient maximal  $O(\log |K|) \cdot \lambda$  beträgt.

**Beweis:** Wir lösen das duale lineare Programm und berechnen aus der Lösung die Pseudometrik  $d$  (falls die Lösung nicht bereits eine Pseudometrik ist). Nun können wir anschließend  $(V, d)$  in den  $l_1^m$  mit  $m = \mathcal{O}(n^2)$  einbetten (nach 1.3.1). Dabei werden Ecken  $u, v \in V$  so auf Punkte  $x_u, x_v \in \mathbb{R}^m$  so eingebettet, dass  $\|x_u - x_v\|_1 \leq d_{u,v}$  gilt. Zudem gilt  $\|x_{s_k} - x_{t_k}\|_1 \geq \Omega(d_{s_k, t_k} / \log |K|)$  für alle Güter  $k \in K$ . Damit wird obiger Bruch beim Ersetzen nur um maximal diesen Faktor größer:

$$\frac{\sum_{u \neq v} \|x_u - x_v\|_1 c_{u,v}}{\sum_{k \in K} \|x_{s_k} - x_{t_k}\|_1 D_k} \leq O(\lambda \log |K|)$$

Im nächsten Schritt betrachten wir den Wert des Bruchs für alle Komponenten  $x_{v,r}$  der Punkte  $x_v$ , vertauschen dabei die Summanden, sodass die Summe über die Komponenten vorn steht und berechnen ein  $\tilde{r}$ , für das der Bruch minimal wird:

$$O(\lambda \log |K|) \geq \frac{\sum_{r=1}^m \sum_{u \neq v} |x_{u,r} - x_{v,r}| c_{u,v}}{\sum_{r=1}^m \sum_{k \in K} |x_{s_k,r} - x_{t_k,r}| D_k} \geq \frac{\sum_{u \neq v} |x_{u, \tilde{r}} - x_{v, \tilde{r}}| c_{u,v}}{\sum_{k \in K} |x_{s_k, \tilde{r}} - x_{t_k, \tilde{r}}| D_k}$$

Zuletzt reduzieren wir die Werte  $\{z_1, \dots, z_l\} =: Z$ , die die  $x_{i, \tilde{r}}$  annehmen können. Dazu wählen wir, solange mehr als zwei Werte verbleiben, die drei größten Werte  $z_o < z_p < z_q$  aus. Damit tritt  $z_p$  im Intervall  $[z_o, z_q]$  für jeden Wert aus  $Z \setminus \{z_p\}$  nur als größerer oder kleinerer Wert auf und die Funktionen in Zähler und Nenner sind linear für  $z_p$ . Dann liegt das Minimum des Bruchs entweder bei  $z_o$  oder  $z_q$  und  $z_p$  kann durch einen dieser Werte ersetzt werden.

Sind nur noch zwei Werte übrig, nimmt  $|x_{u,\tilde{r}} - x_{v,\tilde{r}}|$  den Betrag der Differenz oder 0 an. Ersteren könnten wir ausklammern und kürzen. Setzen wir also den größeren Wert aus  $Z$  zu 1 und den kleineren zu 0 bleibt der Wert des Bruchs konstant. Sei dieser neue Wert  $x'_{v,\tilde{r}}$  für jede Ecke  $v$ .

Aus den  $x'_{v,\tilde{r}}$  berechnen wir schließlich den Schnitt  $S = \{v | x'_{v,\tilde{r}} = 1\}$ . Wie gezeigt erbt dieser den aus der Verzerrung stammenden Faktor, somit gilt dann:

$$O(\lambda \log |K|) \geq \frac{\text{Cap}(S)}{\text{Dem}(S)}$$

□

Abschließend wollen wir einen einfachen, geometrischen Beweis für einen bereits vor der Arbeit von [LLR95] bekannten Satz([Hu63],[RW66]) nachvollziehen:

**Satz: Zwei Güter** Für 2 Güter gilt max-flow = min-cut.

**Beweis:** Wir bilden  $V$  in den  $\mathbb{R}^2$  ab. Ausgehend von der minimalen Pseudometrik  $d$  aus dem vorherigen Beweis und den beiden Gütern  $k$  und  $k'$  wird jede Ecke aus  $V$  auf  $(d_{s_k,x}, d_{s_{k'},x})$  abgebildet. Betrachtet man dann die der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm entsprechende Pseudometrik  $D$  auf  $V$  so ergibt sich:

$$D_{u,v} = \max\{|d_{s_k,u} - d_{s_k,v}|, |d_{s_{k'},u} - d_{s_{k'},v}|\} \leq d_{u,v} \quad (\text{nach Dreiecksungleichung A3})$$

Für  $D_{s_k,t_k}$  ist das erste Element, für  $D_{s_{k'},t_{k'}}$  das zweite der Wert der Pseudometrik  $d$ , sodass hier Gleichheit gilt.

$d$  kann also durch  $D$  ersetzt werden, ohne dass der Bruch größer wird:

$$\lambda = \frac{\sum_{u \neq v} d_{u,v} c_{u,v}}{\sum_{k \in K} d_{s_k,t_k} D_k} \geq \frac{\sum_{u \neq v} D_{u,v} c_{u,v}}{\sum_{k \in K} D_{s_k,t_k} D_k} = \lambda \quad (\text{Minimumeigenschaft von } d)$$

Bildet man dann jeweils den zu einem  $v \in V$  korrespondierenden Punkt  $(v_1, v_2)$  auf  $p_v = (\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_1-v_2}{2})$  ab, stimmt die durch  $\|\cdot\|_1$  erzeugte Metrik auf diesen Punkten mit  $D$  überein:

$$\|p_u - p_v\|_1 = \frac{1}{2}|u_1 - v_1 + u_2 - v_2| + \frac{1}{2}|(u_1 - v_1) - (u_2 - v_2)| = \max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|\} = D_{u,v}$$

.

Übernimmt man nun die Argumentation des vorherigen Beweises ergibt sich für  $S = \{v | x'_{v,\tilde{r}} = 1\}$ :

$$\lambda = \frac{\text{Cap}(S)}{\text{Dem}(S)}$$

□

## 3 Balancierte Separatoren

### 3.1 Definition und Bedeutung

**Def. balancierter Separator:** Sei  $G = (V, E)$  eine Graph und  $S \subseteq V$ .  $S$  heißt  $\lambda$ -balancierter Separator von  $G$  falls, alle Zusammenhangskomponenten des durch  $V \setminus S$  induzierten Subgraphen  $G[V \setminus S]$  höchstens  $\lambda \cdot |V|$  Ecken besitzen.



Es gibt weitere Definitionen, nach denen Separatoren u.a. eine bestimmte Menge  $V' \subseteq V$  statt  $V$  separieren ( $S$  heißt dann  $V'$ -Separator) oder ein festes  $\lambda$  (z.B.  $\frac{1}{2}$ ) gesetzt ist.

Bedeutung haben balancierte Separatoren auch im Bezug zu Baumzerlegungen, so werden sie in den effizientesten Exponentialzeitalgorithmen zur Bestimmung der Baumweite eingesetzt (siehe z.B. [BFK<sup>+</sup>06]).

### 3.2 Konstruktion des Separators

Mit einem Volumenargument gelingt es Linial, London und Rabinovich für Graphen  $G$  mit  $c \cdot \dim_c(G) = o(n^{1/\dim_c(G)})$  kleine Separatoren mit kleinen Komponenten zu konstruieren. Die übliche Verzerrungsdefinition wird dabei umgekehrt, sodass

$$d_G(u, v) \leq \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \leq c \cdot d_G(u, v)$$

gefordert wird (nicht explizit in [LLR95] angegeben, geht aber u.a. aus der Konstruktion der Kugeln mit Radius  $\frac{1}{2}$  (siehe S.10 und [LLR95, S.235, Lemma 6.3]) hervor).

**Satz:** Für einen Graphen  $G = (V, E)$ ,  $n = |V|$  und ein  $c \in \mathbb{R}^+$  mit

$$d := \dim_c(G) \text{ und } c \cdot d = o(n^{\frac{1}{d}})$$

existiert ein  $\lambda$ -Separator  $S$  von  $G$  mit

$$|S| = \mathcal{O}\left(c \cdot d \cdot n^{1-\frac{1}{d}}\right) \text{ und } \lambda = \left(1 - \frac{1}{d+1} + o(1)\right)$$

**Beweis:** Ausgangspunkt ist eine Einbettung  $\varphi$  des Graphen  $G = (V, E)$  in den  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$  (Norm mit Einheitskugel  $\mathbb{B}$ , die nach Definition  $\dim_c$  existiert) mit Verzerrung  $c$ .  $X$  sei die Menge der Punkte, auf die  $V$  abgebildet wird.

Die Konstruktion beruht auf zwei parallelen Hyperebenen  $H_1$  und  $H_2$  mit Abstand  $c$  und der abgeschlossenen Scheibe  $\mathbb{H}$  zwischen ihnen. Diese werden so gewählt, dass der Schwerpunkt der Menge  $X$  in der Scheibe liegt, mit Abstand  $\frac{c}{2}$  zu jeder Hyperebene.  $V_1 \subseteq V$  sei die Menge, die strikt oberhalb der Scheibe  $\mathbb{H}$  eingebettet wird (d.h. jenseits von  $H_1$ ),  $V_2 \subseteq V$ , die die strikt unterhalb eingebettet wird.

Beachtet man die Verzerrung und die Abgeschlossenheit von  $\mathbb{H}$  ist  $S := \varphi^{-1}(X \cap \mathbb{H})$  ein Separator im Graphen  $G$ , denn durch die umgekehrte Einbettungsbedingung muss bei einem Abstand der Hyperebenen von  $c$ , der Abstand  $d_G(v_1, v_2)$  zwischen zwei Ecken  $v_i \in V_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) mindestens 2 betragen.

Zur Abschätzung der Größen der Mengen  $V_1$  und  $V_2$  zitieren [LLR95] aus [YB61]:

Für eine Punktmenge  $X$ ,  $|X| = n$  im  $\mathbb{R}^d$  enthält jeder durch eine durch ihren Schwerpunkt  $O$  verlaufende Hyperebene bestimmte abgeschlossene Halbraum mindestens  $\frac{n}{d+1}$  Punkte aus  $X$ .

Betrachtet man dann die zu  $H_1$  und  $H_2$  parallele Hyperebene durch  $O$ , so können  $\frac{n}{d+1}$  Punkte aus  $V$  nicht in  $\varphi(V_1)$  bzw.  $\varphi(V_2)$  liegen, denn da die Hyperebene in der Scheibe liegt, ist  $\varphi(V_i)$  jeweils Teil des restlichen, offenen Halbraums. Somit ergibt sich für die Größen der  $V_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ):

$$\frac{|V_i|}{|V|} \leq \frac{n - \frac{n}{d+1}}{n} = 1 - \frac{1}{d+1}$$

Nun ist noch die Anzahl der Bildpunkte in der Scheibe  $\mathbb{H}$  bzw. der Ecken in  $S$  zu bestimmen. Zunächst wird jedoch  $O$  als Ursprung angenommen und eine euklidische Einbettung in den  $l_2^d$  betrachtet. Dazu wird festgehalten, dass jede  $d$ -dimensionale Norm als Bild einer affinen Abbildung aus der euklidischen Norm mit Verzerrung höchstens  $\sqrt{d}$  gewonnen werden kann, die Gesamtverzerrung erhöht sich somit auf  $c\sqrt{d}$ . Die euklidische Norm wird u.a. für die folgenden Volumenabschätzungen benötigt. Wir behalten die Bezeichnungen  $X$  und  $\varphi$  und  $\mathbb{H}$  trotz der weiteren Einbettung bei.

Wir wählen einen Radius  $R_0$  linear zum euklidischen Abstand der Hyperebenen, also

$$R_0 = \Theta(c\sqrt{d})$$

Zur Abschätzung der Anzahl der Bildpunkte  $X \cap \mathbb{H}$  in der Scheibe gehen wir in zwei Schritten vor: zunächst betrachten wir die Punkte  $N_1 = \{x \in X \cap \mathbb{H} \mid \|x\|_2 < R_0\}$  (nah am Ursprung  $O$ , illustriert in Abb. 2), später  $N_2 = (X \cap \mathbb{H}) \setminus N_1$  (illustriert in Abb. 3).

$N_1$  ist nichts anderes als ein Schnitt von  $X \cap \mathbb{H}$  mit einer  $d$ -dimensionalen euklidischen Kugel  $K$  mit Radius  $R_0$  und Mittelpunkt im Ursprung  $O$ . Wenden wir die umgekehrte Verzerrungsbedingung an, so müssen alle Punkte aus  $X$  paarweise einen Abstand  $\geq 1$  zueinander haben. Betrachten wir dann eine  $d$ -dimensionale Kugel mit Radius  $\frac{1}{2}$  um jeden Punkt aus  $N_1$ , so schneiden sich diese Kugeln nicht im Inneren. Nun können wir einen Zylinder konstruieren, dessen Grund je eine  $(d-1)$ -dimensionale Kugel ( $B_1$  und  $B_2$ ) mit Radius  $R_0 + \frac{1}{2}$  (Punkte können gerade auf dem Rand der  $d$ -dimensionalen Kugel liegen) ist und dessen Höhe ebenfalls mit  $c\sqrt{d} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \mathcal{O}(c \cdot \sqrt{d})$  begrenzt ist und der alle Kugeln um die Punkte aus  $N_1$  enthält.

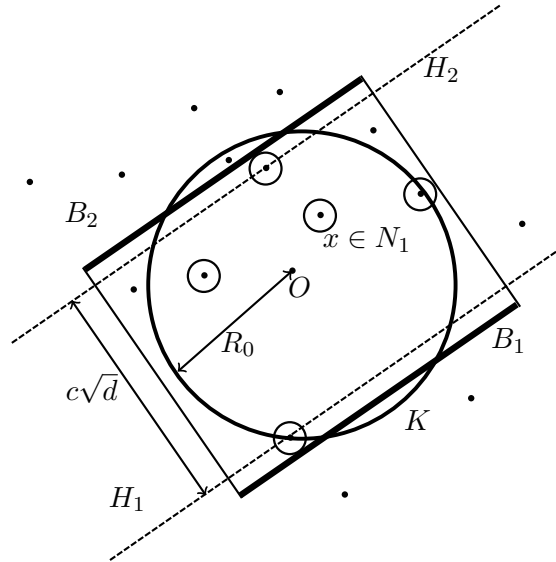


Abbildung 2:  $(d-1)$ -dimensionale Kugeln  $B_1$  und  $B_2$  als Grund des Zylinders sowie Punkte aus  $N_1$  mit dazugehörigen  $d$ -dimensionalen Kugeln

Mit Hilfe des Volumens  $v_t$  einer  $t$ -dimensionalen euklidischen Einheitskugel

$$v_{2t} = \frac{\pi^t}{t!} \text{ bzw. } v_{2t+1} = \frac{\pi^t 2^{t+1}}{\prod_{k=0}^t 2k+1}$$

und daher  $\frac{v_t}{v_{t+1}} = \Theta(\sqrt{t})$  erhält man:

$$\begin{aligned} |N_1| v_d \left(\frac{1}{2}\right)^d &\leq v_{d-1} \cdot \left(R_0 + \frac{1}{2}\right)^{d-1} \cdot \mathcal{O}(c \cdot \sqrt{d}) \\ \Rightarrow |N_1| &\leq 2(2R_0 + 1)^{d-1} \mathcal{O}(\sqrt{d}) \mathcal{O}(c \cdot \sqrt{d}) = \mathcal{O}(c \cdot d \cdot (2R_0 + 1)^{d-1}) \end{aligned}$$

Von den weiter entfernten Punkte  $x$  mit Abstand  $\geq R_0$  zu  $O$  könnten je nach Wahl der Hyperebenen viele Punkte in  $\mathbb{H}$  liegen. Wählen wir jedoch  $H_1$  zufällig (damit sind  $H_2$  und  $\mathbb{H}$  bestimmt) so lässt sich die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Punkt  $x \in R^d$  in  $\mathbb{H}$  zu liegen nach oben beschränken.

Die zufällige Wahl von  $H_1$  realisieren [LLR95] über die gleichverteilte Wahl eines Normalen-einheitsvektors  $h$  für  $H_1$  aus der  $(d-1)$ -dimensionalen Einheitskugel  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Für einen festen Punkt  $x \in R^d$  gilt dann :

$$x \in \mathbb{H} \Leftrightarrow \langle x, h \rangle \in \left[ -\frac{c\sqrt{d}}{2}, \frac{c\sqrt{d}}{2} \right]$$

Sei  $T_x$  die Menge derjenigen  $h \in \mathbb{S}^{d-1}$ , sodass  $x \in \mathbb{H}$ , dann ist  $T_x$  ein Streifen der Breite  $\frac{c\sqrt{d}}{\|x\|_2}$  auf  $\mathbb{S}^{d-1}$  (d.h. Schnitt von  $\mathbb{S}^{d-1}$  mit Hyperebene dieser Breite):

$$\begin{aligned} T_x &= \left\{ h \in \mathbb{S}^{d-1} \mid \langle x, h \rangle \in \left[ -\frac{c\sqrt{d}}{2}, \frac{c\sqrt{d}}{2} \right] \right\} = \mathbb{S}^{d-1} \cap \left\{ h \mid \langle x, h \rangle \in \left[ -\frac{c\sqrt{d}}{2}, \frac{c\sqrt{d}}{2} \right] \right\} \\ &= \mathbb{S}^{d-1} \cap \left\{ h \mid \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, h \right\rangle \in \left[ -\frac{c\sqrt{d}}{2\|x\|_2}, \frac{c\sqrt{d}}{2\|x\|_2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Als Nächstes setzen wir das  $(d-1)$ -dimensionale Maß  $\mu_{d-1}(T_x)$  zum  $d$ -dimensionalen Maß des (kegelartigen) Kugelausschnitts  $\mu_d(\sigma(T_x))$  in Beziehung:

$$\begin{aligned} \sigma(T_x) &:= \{h' \mid h' = rh, h \in T_x, r \in [0, 1]\} \\ \mu_d(\sigma(T_x)) &= \frac{\mu_{d-1}(T_x)}{d} \\ \text{da } \frac{\mu_{d-1}(T_x)}{\mu_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})} &= \frac{\mu_d(\sigma(T_x))}{v_d} \quad \text{und} \quad \mu_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}) = d \cdot v_d \end{aligned}$$

Wie im ersten Schritt können wir nun das Volumen  $\mu_d(\sigma(T_x))$  mit einem Zylinder entlang der Breite von  $T_x$  abschätzen (s. Abb 3). Da alle Punkte auf oder innerhalb von  $\mathbb{S}^{d-1}$  liegen genügt als Basis eine  $(d-1)$ -dimensionale Einheitskugel:

$$\begin{aligned} \mu_d(\sigma(T_x)) &\leq \frac{c\sqrt{d}}{\|x\|_2} v_{d-1} \\ \Rightarrow \mu_{d-1}(T_x) &\leq \frac{cd^{\frac{3}{2}}}{\|x\|_2} v_{d-1} \\ \Rightarrow \forall x, \|x\|_2 \geq R_0 : P(x \in \mathbb{H}) &\leq \frac{cd^{\frac{3}{2}}}{\|x\|_2} \frac{v_d}{d \cdot v_{d-1}} \leq \frac{c\sqrt{d}}{\Omega(R_0)} \Theta(\sqrt{d}) = \mathcal{O}\left(\frac{c \cdot d}{R_0}\right) \end{aligned}$$

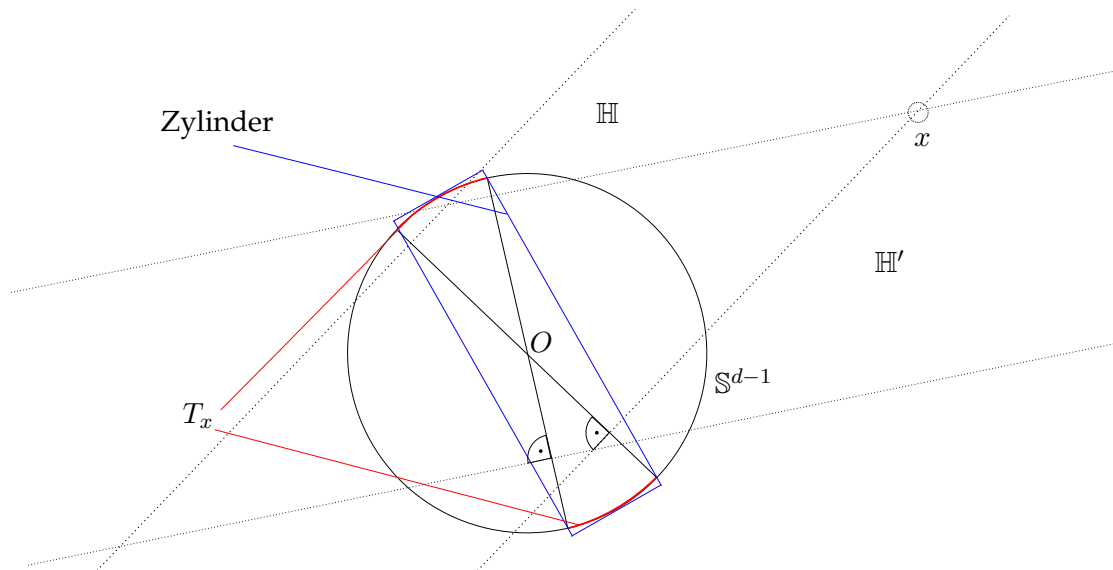


Abbildung 3: Ein Bildpunkt  $x$ , zwei Scheiben  $\mathbb{H}$  und  $\mathbb{H}'$  (die  $x$  gerade noch enthalten), die zu deren Ebenen senkrechten Vektoren, die Menge  $T_x$  und der zur Volumenabschätzung benutzte Zylinder um  $\sigma(T_x)$

Nehmen wir nun die Bildpunkte statt  $\mathbb{H}$  als zufällig gewählt an (z.B. aus Kugel mit Radius  $\max_{x \in X} \|x\|_2$ ), so sind für  $x \neq y$  aus  $X$  die Ereignisse  $x \in \mathbb{H}$  und  $y \in \mathbb{H}$  unabhängig. Da  $N_2$  maximal  $n$  Punkte enthalten kann, ergibt sich für den Erwartungswert:

$$E(|N_2|) = \mathcal{O}\left(\frac{n \cdot c \cdot d}{R_0}\right)$$

Beide Ergebnisse werden zusammengefasst indem  $R_0$  so gewählt wird, dass  $|N_1| = \Theta(E(|N_2|))$  gilt. Dann folgt durch Umstellen  $R_0 = \Theta(n^{\frac{1}{d}})$ . Da als Voraussetzung  $c \cdot d = o(n^{\frac{1}{d}})$  angenommen wurde, verträgt sich dies mit  $R = \Theta(c \cdot \sqrt{d})$ .

Schließlich folgt  $E(|S|) = |N_1| + E(|N_2|) = \mathcal{O}(n^{1-\frac{1}{d}} \cdot c \cdot d)$ . □

## 4 Zerlegungen mit geringem Durchmesser

### 4.1 Definition und Bedeutung

**Def. Zerlegung, Durchmesser:** Eine Zerlegung eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine disjunkte Familie  $Z$  von Teilmengen der Knotenmenge  $V$  mit  $\bigcup Z = V$ . Der Durchmesser  $\delta_Z = \sup \{d_G(u, v) | u, v \in Y, G[Y] \text{ zush.}, Y \subseteq X, X \in Z\}$  der Zerlegung ist das Supremum der Distanzen zwischen zwei Punkten über alle Zusammenhangskomponenten der Blöcke.

Diese Form der Zerlegungen mit geringem Durchmesser wurden zuerst im Kontext von verteiltem Rechnen in [Awe85] und [AGLP89] betrachtet. Dabei entsprechen die Komponenten der Blöcke Clustern, die Teilergebnisse unter Regie eines lokalen Koordinators berechnen. Die Teilergebnisse werden dann zum Gesamtergebnis aggregiert. [AGLP89] berechnen auf diese Weise u.a. maximale stabile Mengen und Färbungen mit einer Farbe mehr als der Maximalgrad. Die besondere Bedeutung der Zerlegungen liegt darin, dass globale Eigenschaf-

ten des Graphen (und damit des berechnenden Netzwerks) durch Kommunikation ermittelt werden müssen, was umso teurer wird, je größer der Durchmesser ist.

## 4.2 Konstruktion

Mit Hilfe einer Einbettung in einen  $\|\cdot\|_\infty$ -normierten Raum der Dimension  $\overline{\dim}_c(G)$ , konstruieren [LLR95] eine Zerlegung  $Z$ . Dies wollen wir im folgenden erläutern (siehe auch Abb. 4).

**Satz:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $\overline{d} := \overline{\dim}_c(G)$ , dann lässt sich eine Zerlegung  $Z$  von  $G$  finden mit  $|Z| = \overline{d} + 1$  und  $\delta_Z \leq 2c\overline{d}$

**Beweis:** Zunächst betrachten wir das Gitter  $\mathbb{Z}^{\overline{d}}$  und konstruieren schrittweise um jede Facette der Dimension  $i, i \in \{0, \dots, \overline{d} - 1\}$  eine  $\|\cdot\|_\infty$ -Umgebung der Größe  $\frac{2\overline{d} - (2i+1)}{2\overline{d}}$ . Um die Gitterpunkte (Dimension 0) wird dabei gerade ein  $\overline{d}$ -dimensionaler Würfel (bzw. Kugel in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm) gelegt. Die Vereinigung aller Umgebungen jeweils für die Dimension  $i \in \{0, \dots, \overline{d} - 1\}$  sei mit  $K_i$  bezeichnet.

Anschließend werden die Mengen

$$T_i = K_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} K_j \text{ f.a. } 0 \leq i \leq \overline{d} \quad (\text{damit ist } T_0 = K_0)$$

und

$$T_{\overline{d}} = \mathbb{R}^{\overline{d}} \setminus \bigcup_{j=0}^{\overline{d}-1} T_j$$

konstruiert.

Der Radius der Umgebung wird dabei mit steigender Dimension kleiner und ist stets kleiner als  $\frac{1}{2}$ . Dadurch sind alle  $T_i$  Vereinigungen disjunkter „Ziegel“ mit jeweils Durchmesser  $< 1$  (leicht zu sehen in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm) und Abstand  $\geq \frac{1}{2\overline{d}}$ .

Ist  $\varphi$  eine Einbettung mit Verzerrung  $c$  von  $G$  in den  $l_\infty^{\overline{d}}$ , so lässt sich mit einer skalierten Version (Faktor  $> 2\overline{d}$ ) obiger Anordnung eine Zerlegung konstruieren: Die Ziegel eines  $T_i$  haben Abstand  $> 1$ , d.h. liegen  $\varphi(u)$  und  $\varphi(v)$  in zwei Ziegeln eines  $T_i$ , so ist  $d_G(u, v) > 1$  und damit  $\{u, v\} \notin E$ . Damit ist jede Zusammenhangskomponente von  $G[\varphi^{-1}(\varphi(V) \cap T_i)]$  in nur einen Ziegel abgebildet.

Liegen  $\varphi(u)$  und  $\varphi(v)$  in einem Ziegel, gilt andererseits  $d_G(u, v) \leq c \cdot 2\overline{d}$  (skalierter Abstand). Damit hat jede Komponente von  $G[\varphi^{-1}(\varphi(V) \cap T_i)]$  einen Durchmesser  $\leq 2c\overline{d}$  und es ist

$$Z = \{\varphi^{-1}(\varphi(V) \cap T_i) \mid 0 \leq i \leq \overline{d}\}$$

eine Zerlegung von  $G$  mit:

$$|Z| \leq \overline{d} + 1 \text{ und } \delta_Z = 2\overline{d}c$$

□

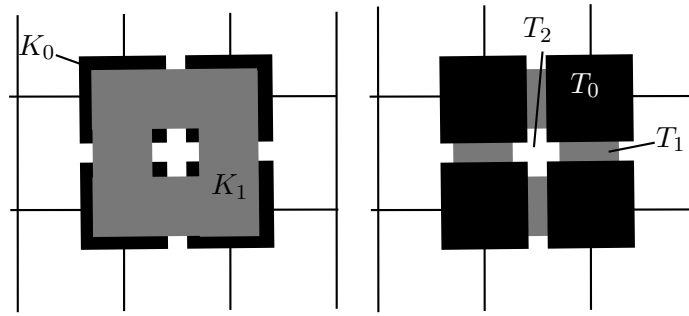


Abbildung 4: Illustration für  $\bar{d} = 2$

links:  $K_i$  als  $\|\cdot\|_\infty$ -Umgebungen der  $i$ -dimensionalen Facetten der  $d$ -dimensionalen Würfel (bzw.  $\|\cdot\|_\infty$ -Kugeln) mit Eckpunkten im  $\mathbb{Z}^{\bar{d}}$ -Gitter ( $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ )

rechts:  $T_i = K_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} K_j$ ,  $T_{\bar{d}} = \mathbb{R}^{\bar{d}} \setminus \bigcup_{j=0}^{\bar{d}-1} T_j$

## Literatur

- [AGLP89] B. Awerbuch, A. Goldberg, M. Luby, and S. Plotkin, *Network decomposition and locality in distributed computation*, Proc. 30th IEEE Symp. on Foundations of Comp. Science (1989), 364–369.
- [Awe85] B. Awerbuch, *Complexity of network synchronization*, Journal of the ACM **32** (1985), 804–823.
- [BFK<sup>+</sup>06] H. L. Bodlaender, F. V. Fomin, A. M. C. A. Koster, D. Kratsch, and D. M. Thilikos, *On exact algorithms for treewidth*, Proceedings of the 14th conference on Annual European Symposium (2006), 672–683.
- [GVY93] N. Garg, V. V. Vazirani, and M. Yannakakis, *Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications*, ACM STOC **25th** (1993).
- [Hu63] T. C. Hu, *Multicommodity network flows*, Operations Research **11** (1963), 344–360.
- [LLR95] N. Linial, E. London, and Y. Rabinovich, *The geometry of graphs and some of its algorithmic applications*, Combinatorica **15** (1995), no. 2, 214–245.
- [LR88] W. Leighton and S. Rao, *An approximate max-flow min-cut theorem for uniform multicommodity flow problems with applications to approximation algorithms*, FOCS **29** (1988), 422–431.
- [RW66] B. Rothschild and A. Whinston, *Feasibility of two-commodity network flows*, Operations Research **14** (1966), 1121–1129.
- [Vaz01] V.V. Vazirani, *Introduction to LP-Duality*, Approximation Algorithms, Springer-Verlag, 2001, pp. 93–107.
- [YB61] I.M. Yaglom and V. G. Boltyansky, *Convex Figures*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.